

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 8.02.2025
Clasa a XII-a

1. Se consideră funcția. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \int_1^x \cos(\cos t) dt$.

a) (5p) Arătați că funcția f este inversabilă, cu inversa derivabilă.

b) (2p) Calculați $(f^{-1})'(0)$.

2. (7p) Se consideră (G, \cdot) un grup finit și H o submulțime proprie a sa cu proprietatea că $x \cdot y \in G \setminus H$, pentru orice elemente x, y din $G \setminus H$. Arătați că există două elemente a, b din H cu proprietatea că $a \cdot b \in G \setminus H$.

3. Fie $H \subset \mathbb{R}$ o submulțime cu cel puțin două elemente, pe care definim legea de compoziție „ $*$ ” cu proprietatea că $x < x * y < y, \forall x, y \in H$ cu $x < y$.

a) (5p) Arătați că legea „ $*$ ” nu admite element neutru și nu e asociativă.

b) (2p) Dați exemplu de o mulțime H și de o lege „ $*$ ” care să fie comutativă și să satisfacă ipoteza.

4. (7p) Calculați $I_1 + I_2$ unde I_1, I_2 sunt integralele:

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{arctg}(\sin x) dx \quad \text{și} \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \arcsin(\operatorname{tg} x) dx$$

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp efectiv de lucru: 3 ore.